PERSOALAN LIMIT DAN DERIVATIF

1. $\lim_{X\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+Cos\ x-\sin x}{\cos x-1+\sin x}$ ....(1)

   Pemecahan:

   Ingat $\cos x = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right)$ = $2cos^2\frac{x}{2} - 1 = 1 - 2sin^2\frac{x}{2}$

   $\sin x = \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}$

   Maka (1) dimanipulasi menjadi:

$$\lim_{X\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+Cos\ x-\sin x}{\cos x-1+\sin x} = \lim_{X\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+2cos^2\frac{x}{2}-1-2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{1-2sin^2\frac{x}{2}-1+2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{X\to\frac{\pi}{2}} \frac{2cos^2\frac{x}{2}-2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}{-2sin^2\frac{x}{2}+2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{X\to\frac{\pi}{2}} \frac{2cos\frac{x}{2}\left(cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right)}{2sin\frac{x}{2}\left(-sin\frac{x}{2}+cos\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{X\to\frac{\pi}{2}} \frac{2cos\frac{x}{2}\left(cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right)}{2sin\frac{x}{2}\left(cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \lim_{X\to\frac{\pi}{2}} \frac{2cos\frac{x}{2}}{2sin\frac{x}{2}} = \lim_{X\to\frac{\pi}{2}} \cot\frac{x}{2} = \cot\frac{\pi}{4} = 1$$

2. $\lim_{X\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^x$

   Penyelesaian:

   Dasarnya $\lim_{X\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. Bentuk $\lim_{X\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^x$ dimanipulasi menjadi

$$\lim_{X\to\infty}\left(\frac{x-1+4}{x-1}\right)^x = \lim_{X\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^x = \lim_{X\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x-1}{4}\right)}\right)^x$$

$$= \lim_{X\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x-1}{4}\right)}\right)^{(x-1)+1} = \lim_{X\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x-1}{4}\right)}\right)^{\left(\frac{x-1}{4}\right).4}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x-1}{4}\right)}\right)\right)$$

$$= \left(\lim_{X\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x-1}{4}\right)}\right)^{\left(\frac{x-1}{4}\right)}\right)^{4} . \lim_{X\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x-1}{4}\right)}\right) = e^4(1+0) = e^4$$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{3x}$

   Penyelesaian:

   Dasarnya $\lim_{X\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$. Manipulasi $\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{3x}$ menjadi:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{3x}.\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\frac{(4^x-2^x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{3}\frac{(2^{2x}-2^x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2^x}{3}\frac{(2^x-1)}{x}$$
   $$= \lim_{x\to 0}\frac{2^x}{3}.\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)}{x} = \frac{1}{3}.\ln 2$$

4. Jika f(x) = $\sin x^o$ tentukan $f'(x)$ atau $\frac{df(x)}{dx}$

   Penyelesaian:

   Pada f(x) = $\sin x$ dan $f'(x) = \cos x$, ini berlaku hanya jika x dalam radian. Maka x^o harus dirubah ke radian yakni setara dengan $\frac{x}{180}\pi$ rad, sehingga

   $$\sin x^o = \sin\frac{x}{180}\pi$$
   $$f'(x) = \frac{\pi}{180}\cos\frac{x}{180}\pi.$$

5. Tentukan $x^3 + y^3 = x^3y^3$

   Penyelesaian:

   Gunakan turunan parsial

   $$3x^2 + 3y^2y' = 3x^2y^3 + 3x^3y^2y'$$
   $$y'(3y^2 + 3x^3y^2) = 3x^2y^3 - 3x^2$$
   $$y' = \frac{3x^2y^3 - 3x^2}{3y^2 + 3x^3y^2}$$

6. Jika $y = \cos x$, tentukan $\frac{d^ny}{dx^n}$

   Penyelesaian:

Cari polanya:

Turunan ke -1 = $-\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; kuadran ke-2

Turunan ke-2 = $-\cos x = \cos\left(x + 2.\frac{\pi}{2}\right)$; kuadran ke-3

Turunan ke-3 = $\sin x = \cos\left(x + 3.\frac{\pi}{2}\right)$; kuadran ke-4

Turunan ke-4 = $\cos x = \cos\left(x + 4.\frac{\pi}{2}\right)$; kuadran ke-4

Turunan ke -5 = $-\sin x = \cos\left(x + 5.\frac{\pi}{2}\right)$; kuadran ke-2

Turunan ke-6= $-\cos x = \cos\left(x + 6.\frac{\pi}{2}\right)$; kuadran ke-3

Turunan ke-7 = $\sin x = \cos\left(x + 7.\frac{\pi}{2}\right)$; kuadran ke-4

Turunan ke-8= $\cos x = \cos\left(x + 8.\frac{\pi}{2}\right)$; kuadran ke-4

...

Turunan ke-n = $\cos x\left(x + n.\frac{\pi}{2}\right)$

7. Jika $f(x) = x^{\sin x}$, Tentukan $f'(x)$

Penyelesaian:

Dasarnya seperti jika $f(x) = e^{x}$ maka

$\ln f(x) = \ln e^{x}$

$\ln f(x) = x \ln e$

$\ln f(x) = x$, turunkan kedua ruas terhadap x

$\frac{1}{f(x)} f'(x) = 1$

$f'^{(x)} = f(x) = e^{x}$

Sekarang pada $f(x) = x^{\sin x}$ di logaritma naturalkan,

$\ln f(x) = \ln x^{\sin x}$

$\ln f(x) = \sin x \ln x$

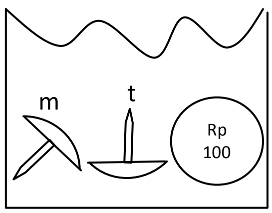
$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \cos x \ln x + \frac{1}{x}.\sin x$$

$$f'(x) = f(x)\left(\cos x \ln x + \frac{1}{x}.\sin x\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{1}{x}.\sin x\right)$$

PERSOALAN PELUANG

Kasus-kasus

Kasus 1: Ada dua paku paying dan sebuah koin seperti berikut:



Cara eksperimen (Ceks): Ketiga objek diambil sekaligus.
Soal: Tentukan peluang semua kemungkinan terambil

I	II	III	Hasil	Sampel
m-> $\frac{3}{10}$	m -> $\frac{3}{10}$	A -> $\frac{1}{2}$	(m, m, A)	S1
		G -> $\frac{1}{2}$	(m, m, G)	S2
	t -> $\frac{7}{10}$	A -> $\frac{1}{2}$	(m, t, A)	S3
		G -> $\frac{1}{2}$	(m, t, G)	S4
t-> $\frac{7}{10}$	m -> $\frac{3}{10}$	A -> $\frac{1}{2}$	(t, m, A)	S5
		G -> $\frac{1}{2}$	(t, m, G)	S6
	t -> $\frac{7}{10}$	A -> $\frac{1}{2}$	(t, t, A)	S7
		G -> $\frac{1}{2}$	(t, t, G)	S8

Menunjukkan bahwa jumlah peluang semua titik sampel sama dengan 1.

Hasil	Sampel
(m, m, A)	P({S1}) = $\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{200}$
(m, m, G)	P({S2}) = $\frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{200}$
(m, t, A)	P({S3}) = $\frac{3}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{21}{200}$
(m, t, G)	P({S4}) = $\frac{3}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{21}{200}$
(t, m, A)	P({S5}) = $\frac{7}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{21}{200}$
(t, m, G)	P({S6}) = $\frac{7}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{21}{200}$
(t, t, A)	P({S7}) = $\frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{49}{200}$
(t, t, G)	P({S8}) = $\frac{7}{10} \times \frac{7}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{49}{200}$
Total	$\frac{9}{200} + \frac{9}{200} + \frac{21}{200} + \frac{21}{200} + \frac{21}{200} + \frac{21}{200} + \frac{49}{200} + \frac{49}{200} = \frac{200}{200} = 1$

Berdasarkan ujicoba di atas:

Soal:

Jika A: Munculnya hasil kembar pada paku payung dan muncul angka pada mata uang. Tentukan peluang A, P(A)!

Jawab:

Titik sampel {(m,m,A), (T,T,A)}

P(A) = P(m,m,A) + p(T,T,A)

$$= \frac{9}{200} + \frac{49}{200} = \frac{58}{200} = \frac{29}{100} = 0{,}29$$

Prinsif penjumlahan: Peluang munculnya suatu peristiwa gabungan = jumlah peluang dari masing-masing titik sampel peristiwa pembentuk gabungan tersebut.

Jika A = {S_1, S_2, S_3, …, S_m} dan S = {S_1, S_2, S_3, …, S_m, …, S_n}, maka

P(A) = P({S_1}) + P({S_2})+ P({S_3})+ ….+ P({S_m})

Kasus 2:

Ada 5 orang (A, B, C, D, E) memperebutkan 1 hadiah juara I, 1 hadiah juara II dan 2 hadiah juara III. Ada berapa cara susunan pemenang yang mungkin.

Jawab:

Permutasi		**Kombinasi**	
I	**II**	**III**	**Titik Sampel**
A	B	CD	S_1
		CE	S_2
		DE	S_3
	C	BD	S_4
		BE	S_5
		DE	S_6
	D	BC	S_7
		BE	S_8
		CE	S_9
	E	BC	S_{10}
		BD	S_{11}
		CD	S_{12}
B	A		
	C		
	D		
	E		
C	A		
	B		
	D		
	E		
D	A		.
	B	…	.
	C		.
	E		
E	A		
	B		
	C		
	D		S_{60}

Ada 60 buah titik sampel.

Banyaknya kemungkinan $= \underbrace{5 \times 4}_{\text{Permutasi}} \times \underbrace{3}_{\text{Kombinasi}}$

Jadi banyaknya cara = $P_2^5 \times C_2^3 = \frac{5.4.3.2.1}{3.2.1} \times \frac{3.2}{2.1} = 60$ cara.

Kasus 3 (Masalah lebih lanjut):

Ada 1000 orang memperebutkan:

- 1 hadiah juara I;
- 1 hadiah juara II;
- 1 hadiah juara III;
- 1 hadiah juara IV;
- 1 hadiah juara V;
- 20 hadiah juara VI;
- 30 hadiah juara VII;
- 50 hadiah juara hiburan;

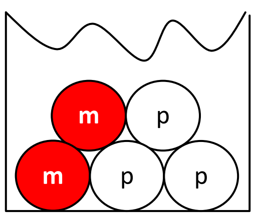
Ada berapa cara susunan pemenang yang mungkin.

Jawab:

Analog dengan cara diatas, banyaknya kemungkinan adalah =

$$P_5^{1000} \times C_{20}^{995} \times C_{30}^{975} \times C_{50}^{945}$$

Kasus 4: Ada dua 2 merah dan 3 putih:



Cara eksperimen: Diambil acak 3 bola sekaligus.

A: kejadian terambil 1 merah dan 2 putih. Tentukan peluang A.

Jawab:

Untuk memudahkan kita beri indek m_1, m_2, p_1, p_2, p_3, maka hasil yang mungkin

$m_1, m_2, p_1 = S_1$

$m_1, m_2, p_2 = S_2$

$m_1, m_2, p_3 = S_3$

$m_1, p_1, p_2 = S_4$

$m_1, p_1, p_3 = S_5$

$m_1, p_2, p_3 = S_6$

$m_2, p_1, p_2 = S_7$

$m_2, p_1, p_3 = S_8$

$m_2, p_2, p_3 = S_9$

$p_1, p_2, p_3 = S_{10}$

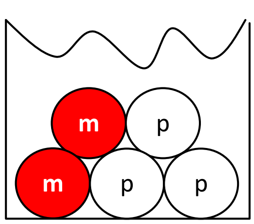
A = { S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9}, n(A) = 6

P(A) = 6/10 = 0,6

Dengan rumus:

$$P(A) = \frac{C_{1m}^{2m} \times C_{2p}^{3p}}{C_{3\,bola}^{5\,bola}} = \frac{C_1^2 \times C_2^3}{C_3^5} = \frac{\frac{2}{1} \times \frac{3.2}{2.1}}{\frac{5.4.3}{3.2.1}} = \frac{6}{10} = 0,6$$

Kasus 5: Ada dua 2 merah dan 3 putih:



Cara eksperimen: Diambil acak 3 bola satu per satu tanpa pengembalian

A: kejadian terambil 1 merah dan 2 putih. Tentukan peluang A.

Jawab:

I	II	III	Peluang
m → $\frac{2}{5}$	p → $\frac{3}{4}$	p → $\frac{2}{3}$	P(m,p,p) = $\frac{2}{5}.\frac{3}{4}.\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$
p → $\frac{3}{5}$	m → $\frac{2}{4}$	P → $\frac{2}{3}$	P(p,m,p) = $\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$
p → $\frac{3}{5}$	p → $\frac{2}{4}$	m → $\frac{2}{3}$	P(p,p,m) = $\frac{3}{5}.\frac{2}{4}.\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$

Total = $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}=0,6$

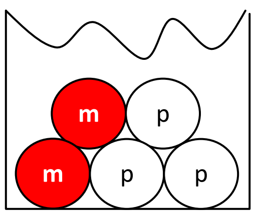
Dengan penalaran:

$$P(A) = P(1m, 2p) \begin{cases} m-p-p \\ p-m-p \\ p-p-m \end{cases}$$

$P_{(1m,2p)}^{3\ bola}$ maka $P(A) = Banyaknya\ cabang\ \times Nilai\ Peluang\ Cabang\ Pertama$

$$= P_{(1m,2p)}^{3\ bola} \times P(m,p,p) = \frac{3!}{1!.2!} \times \frac{2}{5}.\frac{3}{4}.\frac{2}{3} = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Kasus 6: Ada dua 2 merah dan 3 putih:



Cara eksperimen: Diambil acak 3 bola satu per satu dengan pengembalian
A: kejadian terambil 1 merah dan 2 putih. Tentukan peluang A.

Jawab:

I	II	III	Peluang
m → $\frac{2}{5}$	p → $\frac{3}{5}$	p → $\frac{3}{5}$	P(m,p,p) = $\frac{2}{5}.\frac{3}{5}.\frac{3}{5}=\frac{18}{125}$
p → $\frac{3}{5}$	m → $\frac{2}{5}$	P → $\frac{3}{5}$	P(p,m,p) = $\frac{3}{5}.\frac{2}{5}.\frac{3}{5}=\frac{18}{125}$
p → $\frac{3}{5}$	p → $\frac{3}{5}$	m → $\frac{2}{5}$	P(p,p,m) = $\frac{3}{5}.\frac{3}{5}.\frac{2}{5}=\frac{18}{125}$

Total = $\frac{18}{125}+\frac{18}{125}+\frac{18}{125}=\frac{54}{125}$

Dengan penalaran:

$$P(A) = P(1m, 2p) \begin{cases} m-p-p \\ p-m-p \\ p-p-m \end{cases}$$

$P_{(1m,2p)}^{3\ bola}$ maka $P(A) = Banyaknya\ cabang\ \times Nilai\ Peluang\ Cabang\ Pertama$

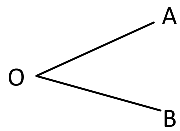
$$= P_{(1m,2p)}^{3\ bola} \times P(m,p,p) = \frac{3!}{1!.2!} \times \frac{2}{5}.\frac{3}{5}.\frac{3}{5} = 3 \times \frac{18}{125} = \frac{54}{125}$$

PERSOALAN BARISAN DAN DERET

Pada pembentukan sudut berikut:

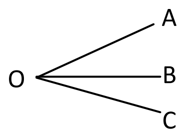
Banyak Garis	Jumlah Sudut
1	$0 = 1.\frac{(1-1)}{2}$
2	$1 = 2.\frac{(2-1)}{2}$
3	$3 = 3.\frac{(3-1)}{2}$
4	$6 = 4.\frac{(4-1)}{2}$
5	$10 = 5.\frac{(5-1)}{2}$
.	.
.	.
.	.
n	$n.\frac{(n-1)}{2}$

a.



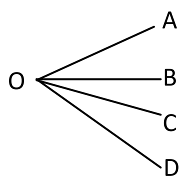
Banyaknya sudut 1 ($\angle AOB$)

b.

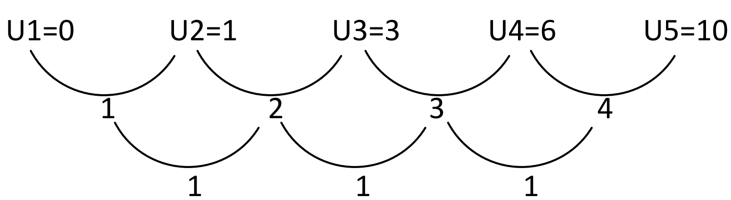


Banyaknya sudut 3 ($\angle AOB, \angle AOC, \angle BOC$)

c.



Banyaknya sudut 6 ($\angle AOB, \angle AOC, \angle AOD, \angle BOC, \angle BOD, \angle COD$)
Dst.



Setelah **dua** kali proses mengurangkan maka didapat hasil yang stabil, berarti rumus suku ke-n nya berderajat **dua**. Un = an^2+ bn + c

Karena berderajat dua, permisalan suku ke-n adalah:
Un = an^2+ bn + c, yakni:
U1 = $a(1)^2 + b(1) + c = a + b + c$
U2 = $a(2)^2 + b(2) + c = 4a + 2b + c$
U3 = $a(3)^2 + b(3) + c = 9a + 3b + c$
U4 = $a(4)^2 + b(4) + c = 16a + 4b + c$
U5 = $a(5)^2 + b(5) + c = 25a + 5b + c$

Penyelidikan selisih tetapnya:

U1=a+b+c U2=4a+2b+c U3= 9a+3b+c U4=16a+4b+c U5=25a+5b+c

3a +b 5a+b 7a+b 9a+b

2a 2a 2a

Jika diterapkan dari perhitungan banyaknya sudut di atas, maka:

U1=0 U2=1 U3=3 U4=6 U5=10

1 2 3 4

1 1 1

a + b + c = 0
3a + b = 1
2a = 1
Diselesaikan: a = $\frac{1}{2}$, b = $-\frac{1}{2}$, c = 0
Sehingga Un = $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 0 = \frac{1}{2}n(n-1)$

Carl Frederic Gauss